ザリスキータイプの幾何 : 豊富な幾何上での代数的閉体の構成 (モデル理論と代数幾何の交流)

板井, 昌典

数理解析研究所講究録 1344 巻 2003 年 1-6

ザリスキータイプの幾何

豊富な幾何上での代数的閉体の構成

板井　昌典 (ITAI Masanori)
東海大学　理学部　情報数理学科
Department of Mathematical Sciences
Tokai University

概要

We disscuss the details of the field construction via Zariski geometries in the stable context.

1　はじめに

フルショフスキーによる幾何的モーデル・ラング予想の解決から１０年が経過したが，彼の手法・論法が広く認知されているとは言いがたいのが現状である．ここでは，証明の一部にではあるが再度光をあててみたい．特に,「正標数のザリスキー幾何」とでも呼べる内容に的を絞って解説する．

幾何的モーデル・ラング予想というのは関数体上の準アーベル多様体の構造に関する予想であり，証明は標数０の場合と，正標数の場合に分けられる．幾何的モーデル・ラング予想そのものについては [Hr96], [Bo98] を参照してもらうことにし，本稿では正標数の場合の証明の中で，ザリスキー幾何が関係する部分について論じたい．

まず [Bo98] (193 ページ) の中の一文に注目しよう．

> By the dichotomy theorem for Zariski types ([Mar, Theorem 5.1]), as q is not locally modular, q interpretes an infinitely definable algebraically closed fields of rank one.

これは幾何的モーデル・ラング予想の正標数の場合の証明の重要な部分に関係するところである．「無限個の論理式を用いて定義可

能な，階数 1 の代数的閉体を q が翻訳する」と，簡単に書いてあるがこの部分を詳しく検討するのが目的である．特に，どのような経緯で代数的閉体が得られるかを明瞭にしたい．

2 Zariski types

はじめにザリスキー幾何とザリスキータイプの幾何の違いについて考えたい．紛らわしい名称であるが，ザリスキー幾何というのは [HZ] にあるザリスキー幾何の公理系 (Z0)〜(Z3) によって規定される幾何を指し，ザリスキータイプの幾何というのは [Hr96] Definition 2.3 (p. 671) によって定義されるタイプによる幾何を指す．

T を量記号を消去する完全理論とし，P を極小タイプとする．量記号と否定記号なしの論理式で定義される P^n の部分集合を閉集合とする位相を導入することが出来る（空集合は閉集合と定める）．既約閉集合は通常通り定義する．

Definition 2.3. [Hr96] 次の (i) から (iii) が成り立つとき，P をザリスキータイプという．

(i) P^n の任意の閉集合は，有限個の既約閉集合の和集合である．

(ii) X, Y をともに P^n の閉集合とする．Y が既約で，X が Y の真部分集合であるとき，$\dim(X) < \dim(Y)$ である．

(iii) X を P^n の既約閉集合とし，$\dim(X) = m$ とする．対角線

$$Y_{i,j} = \{(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots) \in P^n \mid x_i = x_j\}$$

を考える．このとき，$X \cap Y_{i,j} = \bigcup_s X_s$ であり，各 X_s は既約閉集合で $\dim(X_s) \geq m-1$ である．

注: 性質 (i) から各 P^n にネーター位相が入る．ネーター位相が入った空間には自然な次元が定義されるから，性質 (ii)，(iii) に現れる dim はこの意味での次元である．性質 (iii) をザリスキータイプの次元定理と呼ぶ．

D をザリスキー幾何とすると，D は強極小になる ([HZ], Corollary 2.7)．つまり D の理論 $T(D)$ を考えると，$T(D)$ のモデルはすべて極小になる．ところがザリスキータイプ P に対しては，これに相当するような定理は得られない．ザリスキータイプは極小性をもっているので，P の定義可能部分集合は有限集合かあるいは補-有限集合であるが，この性質は P に限定されるのである．

3 体を構成する

まず [Hr96] の Lemma 2.5. に着目しよう．

Lamma 2.5. T を安定理論とし，P を豊富なザリスキータイプとする．このときタイプで定義される体 F^*，論理式で定義される体 F，さらに F の定義可能な部分体 F_α が存在して，$\bigcap_\alpha F_\alpha = F^*$ である．

豊富なザリスキー幾何から体を構成する方法は [HZ] の 6 節に詳述されている．豊富なザリスキータイプに対しても同様な議論が遂行可能である．ここで我々が注意しなければならないのは，以下の諸議論が，stable という条件下で展開出来ることを確認することである．

- specialization, indiscernible array の議論
- 群図表の議論
- 階数 2 の群が，階数 1 の集合に作用するという状況下で体を構成する Cherlin の議論

[HZ] の Lemma 6.10 と Lemma 6.11 は D が極小で万有構造が stable という状況でも成り立つが，出来あがる体はこの時点では代数的閉体かどうか不明である．体が出来るということが保証されるだけである．

幾何的モーデル・ラング予想の正標数の場合の証明では，分離的閉体における極小タイプがザリスキータイプとして活躍する．非局所モジュラーな場合は，Lemma 6.11 により体 k を翻訳するが，k が代数的閉体になるというのは次の事情による．

定理 (Wagner)[Wa00]

正標数の極小体は，代数的閉体である．

注：

1. [De98] Proposition 2.16 (p. 153) の証明中に "As a minimal fields is algebraically closed ..." という記述があるが，Delon のノートが執筆された時点で，正標数の極小体が代数的に閉じていることが証明されていたかどうかは不明である．結果としては正しいが，興味深い一文である．
2. 標数の如何にかかわらず，強極小体が代数的に閉じているというのは Macintyre の古典的結果である．標数が 0 の場合は，極小体が代数的に閉じているかどうかは未解決問題である．

3.1 代数的閉体になるための条件

本小節では [HZ] の 7 節の結果を，ザリスキータイプの幾何上で考えてみる．豊富なザリスキー幾何は，上記 Lemma 6.11 により体を翻訳するがこの体は，万有構造が強極小になっているので

Macintyre の定理により代数的閉体である．[HZ] の８節はザリスキー幾何の主定理の一つである Theorem B の証明にあてられているが，p. 42 の上の方で Macintyre の定理によらず体が代数的に閉じていることを示す議論が紹介されている．７節の Proposition 7.1 を用いるものであるが，この方法で体が代数的に閉じていることを示そうとすると，Proposition 7.1 の議論において関係する体が代数的に閉じているということが仮定されていてはならない．この点は [HZ] では明瞭でないのでまず，Proposition 7.1 の論法から検討しよう．

以下 T を安定理論（例えば，分離的閉体），P をザリスキータイプとする．F を P から得られる体とし，F 上で射影空間 $\mathbb{P}^n(F)$ 等を考える．位相はすべて各 P^n でのネーター位相で考える．

Proposition 7.1

X を多様体，$C \subseteq X \times \mathbb{P}^n(F)$ を閉集合とする．射影 $\pi : X \times \mathbb{P}^n(F) \longrightarrow X$ に対して $\pi(C)$ が X で稠密ならば，$\pi(C) = X$ である．

証明．C が既約だと仮定しても一般性を失わない．T が翻訳する体を F とする．$V = F^{n+1}, V' = F^{n+1}\backslash\{(\bar{0})\}$ とする．また写像 $\theta : V' \longrightarrow \mathbb{P}^n(F)$ に対して，

$$X \times V' \ni (x, v) \longmapsto (x, \theta(v)) \in X \times \mathbb{P}^n(F)$$

も 同じ θ と書くことにする．θ は射，すなわちグラフが既約閉集合である．$\theta^{-1}(C)$ の $X \times V$ における閉包を C^* とおく．θ は射なので連続写像であり，$\theta^{-1}(C)$ は $X \times V'$ の閉集合である．よって $C^* \cap (X \times V') = \theta^{-1}(C)$ である．

さて，$\alpha \in F, v \in V, x \in X$ に対して，$(x, \alpha v)$ を $\alpha \cdot (x, v)$ と書く．F を多様体とみなすことが出来て，加法と乗法が射なので，

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & X \times V & \longrightarrow & X \times V \\ & (x, v) & \longmapsto & (x, \alpha v) \end{array}$$

は $X \times V$ から $X \times V$ 自身への射を定義し，$\alpha \in F^\times = F\backslash\{0\}$ のときは，同型射になる．任意の $(x, v) \in C^*$ と $\alpha \in F^\times$ に対し $(x, \alpha v) \in \theta^{-1}(C)$ である．よって

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(C) &\subseteq \alpha^{-1}(\theta^{-1}(C)) = \{(x, v) : (x, \alpha v) \in \theta^{-1}(C)\} \\ &\subseteq \alpha^{-1}(C^*) = \{(x, v) : (x, \alpha v) \in C^*\} \end{aligned}$$

が成り立っている．$\alpha^{-1}(C^*)$ は閉集合なので，$C^* \subseteq \alpha^{-1}(C^*)$ が分かる．よって $(x, v) \in C^*$ かつ $\alpha \in F^\times$ ならば，$(x, \alpha v) \in C^*$ である．

$\dim(C^*) = \dim(C) + 1$ である．$\mathcal{Z} = \{Z_1, \cdots, Z_m\}$ を，C^* の既約成分で次元が最大のものたち全部の集合とする．$Z \in \mathcal{Z}$ と $\alpha \in F^\times$

に対し，$\alpha^{-1}(Z) \in \mathcal{Z}$ である．よって，$F^{\times}$ の各元は集合 $\mathcal{Z}$ の置換を引き起こしている．

$$\mathrm{Fix}(\mathcal{Z}) = \{\alpha \in F^{\times} : \text{各 } Z \in \mathcal{Z} \text{ に対して } \alpha^{-1}(Z) = Z\}$$

によって $F^{\times}$ の部分群 $\mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$ を定義すると，指数 $[F^{\times} : \mathrm{Fix}(\mathcal{Z})]$ は高々 $m!$ である．

ここで万有構造が安定（分離閉体の理論は安定）であり，理論が安定である体 F（安定体と呼ぶ）の乗法群は連結なので（[Wa97], Lemma 2.3.1, p. 131），$\mathrm{Fix}(\mathcal{Z}) = F^{\times}$ でなければならない．つまり，任意の $\alpha \in F^{\times}$ と $Z \in \mathcal{Z}$ に対して $\alpha^{-1}(Z) = Z$ が成り立っている．

$\mathcal{Z}$ の元 Z を 1 つ固定する．$\dim(Z) > \dim(X \times \{0\})$ なので，$\dim(Z \cap (X \times V')) = \dim(C) + 1$ である．よって $\theta(Z \cap (X \times V')) \subseteq X \times \mathbb{P}^n$ は C のなかで稠密である．よって仮定から $\pi(\theta(Z \cap (X \times V')))$ は X の中で稠密である．

$a \in X$ を一般点とする．$Z(a) = \{y \in V' : (a, y) \in Z\}$ とおき，$b \in Z(a)$ を任意の元とする．Z は $F^{\times}$ の元で不変なので，任意の $\alpha \in F^{\times}$ に対して，$\alpha Z = Z$ である．$b \in (\alpha Z)(a)$ なので，$\alpha b \in Z(a)$ である．つまり $F^{\times} b \subseteq Z(a)$ である．しかし，$Z(a)$ は閉集合であるので，$Fb \subseteq Z(a)$ でなければならない．よって $(a, 0) \in Z$ である．したがって，集合 $\{x \in X : (x, 0) \in Z\}$ は X の一般点を含んでいる．つまり $\{x \in X : (x, 0) \in Z\} = X$ である．

したがって，単に一般点だけでなく，すべての元 $a \in X$ に対して $Z(a) \neq \emptyset$ である．さて，$X \times V$ にザリスキータイプの次元定理を適用すると，

$$\dim(Z(a)) \geq \dim(Z) - \dim(X) = 1$$

なので，任意の元 a に対して $Z(a)$ が無限集合であることが分かる．よって $(a, v) \in Z$ となる $v \neq 0$ が存在する．$(a, v) \in C^{*} \cap (X \times V') = \theta^{-1}(C)$ なので，$(a, \theta v) \in C$ である．よって，すべての $a \in X$ は $\pi(C)$ に入っている．すなわち $\pi(C) = X$ である．　**証明終わり**

この Proposition 7.1 を用いて，豊富なザリスキータイプによって翻訳される体 F が代数的に閉じていることを [HZ] の Theorem B の証明に倣って証明しよう．

定理. T を安定理論，P を豊富なザリスキータイプとする．このとき P は代数的閉体を翻訳する．

証明. f を定数ではない $F[X]$ の多項式とする．f を射とみなす．f のグラフの $\mathbb{P}^1(F) \times \mathbb{P}^1(F)$ における閉包 G を考える．G をグラフとする $\mathbb{P}^1(F)$ から $\mathbb{P}^1(F)$ への射 g を考える．g は f を自然に拡張している．Proposition 7.1 より g は全射になっている．$\mathbb{P}^1(F) = F \cup \{\infty\}$

だから $g(a)=\infty$ となる $a \in \mathbb{P}^1(F)$ が存在する．f は ∞ に対しては定義されていないから，$g(\infty)=\infty$ でなければならない．よって g の全射性から $g(b)=0$ となる $b \neq \infty$ が存在する．この b に対しては $f(b)=0$ になっているから，b は代数方程式 $f(X)=0$ の解である．つまり F は代数的に閉じている．

参考文献

[Bo98] E. Bouscaren, *Proof of the Mordell-Lang conjecture for the function fields,* LNM 1696, Springer, 1998

[De98] F. Delon, *Separably closed fields,* LNM 1696, Springer, 1998

[Hr96] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for the function fields,* J of AMS, 1996

[HZ] E. Hrushovski, B. Zil'ber, *Zariski Geometries,* J of AMS, 1996

[Wa97] F. W. Wagner, **Stable Groups**, Cambridge University Press, 1997

[Wa00] F. W. Wagner, *Minimal Fields,* J of Sym. Logic, vol. 65, no. 4, 2000, pp. 1833-1835